ISRAEL JOURNAL OF MATHEMATICS, Vol. 55, No. 2, 1986

ENSEMBLES INTERSECTIFS ET RÉCURRENCE DE POINCARÉ

PAR

ANNE BERTRAND-MATHIS[†]

U. E. R. de Math. et Informatique, L. A. associé au C. N. R. S. 226, Université de Bordeaux I, 351, cours de la Libération, F-33405 Talence Cedex, France

ABSTRACT

We show that the intersective set and the set of Poincaré are equal and we apply this fact to the repartition modulo 1 of a certain sequence of type $(x\theta^n)_{n\geq 0}$.

§1. Les ensembles intersectifs sont les ensembles de Poincaré

Nous appellerons système dynamique tout quadruplet (X, B, μ, T) où X désigne un ensemble, B une σ-algèbre sur X, μ une mesure probabiliste sur cette algèbre et T une application de X dans lui-même conservant la mesure μ (c'est-à-dire que pour tout ensemble mesurable A, $\mu(T^{-1}A) = \mu(A)$).

DÉFINITION I. Nous appellerons *ensemble de Poincaré* tout sous-ensemble P de $\mathbf{N}^*$ tel que étant donnés un système dynamique (X, B, μ, T) et un ensemble mesurable A de mesure non nulle:

$$\exists m \in P \qquad \mu(T^{-m}A \cap A) > 0.$$

Pour tout sous-ensemble S de $\mathbf{N}^*$, nous désignerons par $S-S$ l'ensemble des nombres de la forme $a-b$ avec $a \in S$, $b \in S$, $a \neq b$. Nous appellerons densité d'un sous-ensemble S de $\mathbf{N}$ la limite, lorsqu'elle existe:

$$d(S) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} {}^{\#}\{b \in S, b < N\}$$

[†] Au cours de l'an passé P. Liardet, J. F. Méla et Y. Katznelson ont, de façon indépendante, redemontré le Théorème I; J. F. Méla et P. Liardet en sont venus à penser que la conjecture de Rusza est fausse.

Reçu le 1 janvier 1985

où $^{\#}A$ désigne le cardinal d'un ensemble A. Nous appellerons densité supérieure de S

$$\bar{d}(S) = \overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{N} {}^{\#}\{b \in S, b < N\}.$$

Nous appellerons densité supérieure de Banach le nombre

$$\overline{\mathrm{BD}}(S) = \overline{\lim_{{}^{\#}I\to\infty}} \frac{{}^{\#}(S \cap I)}{{}^{\#}I}$$

où la limite supérieure est prise sur l'ensemble des intervalles I de $\mathbf{N}$.

Définition II. Nous appellerons *ensemble intersectif* tout sous-ensemble H de $\mathbf{N}^*$ vérifiant les conditions équivalentes qui suivent:

(1) pour tout sous-ensemble S de densité strictement positive, alors

$$H \cap (S - S) \neq \emptyset.$$

(2) pour tout sous-ensemble S de densité supérieure strictement positive

$$H \cap (S - S) \neq \emptyset.$$

(3) pour tout sous-ensemble S de densité supérieure de Banach strictement positive:

$$H \cap (S - S) \neq \emptyset.$$

On trouvera dans Rusza [7] et Fürstenberg [4] la preuve que ces conditions sont équivalentes; on trouvera dans Kamae–Mendès France [5] et Rusza [8] la preuve que les conditions qui suivent sont aussi équivalentes:

Définition III. Nous appellerons *ensemble de van der Corput* tout sous-ensemble H de $\mathbf{N}^*$ vérifiant les conditions équivalentes qui suivent:

(1) Pour toute mesure positive ν sur $[0,2\pi]$ si

$$\forall k \in H \qquad \int_0^{2\pi} \cos kx d\nu(x) = 0,$$

alors ν est continue en 0.

(2) Pour toute mesure ν positive sur $[0,2\pi]$ si

$$\forall k \in H \qquad \gamma_k = \int_0^{2\pi} e^{-ihx} d\nu(x) = 0$$

alors ν est continue en 0.

(3) Si pour tout $h \in H$ la suite $v_n = (u_{n+h} - u_n)_{n \geqq 0}$ est équirépartie modulo un alors la suite $(u_n)_{n \geqq 0}$ l'est aussi.

(4) $\forall \varepsilon > 0\ \exists P(x) = \Sigma_{h \in H \cup \{0\}} a_n \cos hx$, où $a_h \in R$ tel que

$$P(0) = 1, \qquad a_0 \leqq \varepsilon,$$

$$\forall x \in \mathbf{R}, \qquad P(x) \geqq 0.$$

Les réflexions qui suivent ont été inspirées par l'article de Mendès France et Kamae [5] et par l'ouvrage de Fürstenberg [4]; leur langage commun nous a frappé: ce n'était pas la même soupe, mais c'était le même assaisonnement et il nous a semblé raisonnable de conjecturer que les ensembles de Poincaré et ceux de van der Corput sont exactement les mêmes.

Rusza de son côté a conjecturé que les ensembles de van der Corput et les ensembles intersectifs étaient les mêmes ensembles.

Nous ne nous sommes tirés d'aucune de ces conjectures mais nous sommes en mesure de prouver le résultat bâtard que voici:

THÉORÈME 1. *Soit H un sous-ensemble de* $\mathbf{N}$; *les conditions suivantes sont équivalentes*:

(1) *H est un ensemble de Poincaré*;

(2) *H est un ensemble intersectif.*

On trouvera dans [4] la preuve que (1) $\Rightarrow$ (2). Montrons que (2) $\Rightarrow$ (1):

LEMME 1. *Soit (X, B, μ, T) un système dynamique, et soit A un sous-ensemble mesurable de X. Alors l'ensemble*

$$C = \{x\,; \exists n, m \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}\}, \qquad x \in T^n A \cap T^m A \quad \textit{et} \quad \mu(T^n A \cap T^m A) = 0$$

est un ensemble T invariant de mesure nulle.

C'est en effet la réunion dénombrable d'ensembles de mesure nulle et il est clair qu'il est T-invariant.

LEMME 2. *Soit (X, B, μ, T) un système dynamique, et soit A un ensemble de mesure non nulle.*

Soit D l'ensemble des éléments x de A tels qu'il existe une suite $(j_i)_{i \geqq 0}$ d'éléments de A et une suite $(n_i)_{i \geqq 0}$ croissants d'entiers de densité supérieure strictement positive telle que

$$x = T^{n_i}(j_i).$$

Alors D est de mesure non nulle.

D'après le théorème de récurrence de Khintchine [6], il existe une suite m_i de densité positive d telle que pour tout i:

$$\mu(T^{-m_i}A \cap A) \geqq \frac{(\mu(A))^2}{2}.$$

Soit f_n la fonction qui vaut 1 si x appartient à $T^{-n}A \cap A$, ou 0 sinon. Alors pour tout n appartenant à $M = \{m_i ; i \geqq 0\}$

$$\int_X f_n \geqq \tfrac{1}{2}(\mu(A))^2$$

et donc:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum \int_X f_n d\mu \geqq \frac{d}{2}(\mu(A))^2.$$

Soit $V = \{x ; \lim_{N\to\infty}(1/N)\sum f_n(x) = 0\}$. Montrons que

$$\mu(V) < 1.$$

Sinon, par convergence dominée:

$$\frac{1}{N} \sum_{m \leqq N} \int_X f_m d\mu = \frac{1}{N} \sum_{n \leqq N} \int_V f_n d\mu,$$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \int_V f_n d\mu = \int_V \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum f_n d\mu = 0$$

et donc

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n<N} \int_X f_n d\mu = 0$$

ce qui contredit le théorème de Khintchine.

L'ensemble D est égal à $X - V$ car

$$\begin{aligned} x \in X - V &\Leftrightarrow \overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{N} \sum_{n<N} f_n(x) > 0 \\ &\Leftrightarrow \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} {}^{\#}\{n \leqq N ; x \in T^{-n}A \cap A\} > 0 \\ &\Leftrightarrow x \in D \end{aligned}$$

et la mesure de D est donc positive.

LEMME 3. *Soient H un ensemble intersectif, (X, B, μ, T) un système dynamique, T une transformation inversible, A un ensemble de mesure non nulle.*

Alors

$$\exists n \in H \qquad \mu(T^{-n}A \cap A) > 0.$$

Soit D comme au lemme 2 et soit C défini comme au lemme 1.

Soit x appartenant à D mais pas à C (x existe car C est de mesure nulle contrairement à D).

Soient $(n_i)_{n \geq 0}$ et $(z_i)_{i \geq 0}$ définis comme au lemme 2 en fonction de x.

La suite $(n_i)_{n \geq 0}$ étant de densité strictement positive, et l'ensemble M étant intersectif.

$$\exists i, j \qquad n_i - n_j \in H$$

$$x = T^{n_i}(z_i) = T^{n_j}(z_j).$$

T étant inversible

$$z_j = T^{n_i - n_j} z_i.$$

Comme z_i et z_j sont dans A, $T^{-(n_i - n_j)}A \cap A$ est non vide; il contient z_i; z_i n'appartient pas plus que x à C car C est T-invariant et donc

$$\mu(T^{-(n_i - n_j)}A \cap A) > 0,$$

$$n = n_j - n_i \quad \text{contient donc } 0.$$

La preuve du théorème s'achève en étendant le lemme 3 au cas où T n'est pas inversible selon la technique standard.

Remarque. La classe des ensembles de la forme $B-B$ ou B est un sous-ensemble de $\mathbf{N}$ de densité supérieure de Banach positive (resp. de densité positive, ou de densité supérieure positive) ne possède pas la propriété de Ramsey (on dit qu'une classe S de sous-ensembles de $\mathbf{N}$ possède la propriété de Ramsey si

$$S_1 \cup S_2 \in S \Rightarrow S_1 \text{ ou } S_2 \text{ contient un élément de } S).$$

(La classe des ensembles de la forme $B-B$ sans condition sur B par exemple possède cette propriété [4].)

En effet, si la classe S possède la propriété de Ramsey, la classe S^* des ensembles qui recoupent tous les ensembles de la classe S possède la propriété suivante:

$$S_1 S_2 \in S^* \Rightarrow S_1 \cap S_2 \in S^*.$$

Si S est la classe des ensembles de la forme $B-B$ ou B est de densité positive,

S^* est alors la classe des ensembles de Poincaré d'après le théorème 1 et les ensembles

$$H_1 = \{n^2; n \in \mathbf{N}\}, \qquad H_2 = \{2n^2; n \in \mathbf{N}\}$$

sont d'intersection vide et sont des ensembles de Poincaré [4].

§2. Ensembles de van der Corput

Rusza a prouvé [8] que les ensembles de van der Corput sont des ensembles intersectifs; ils sont donc des ensembles de Poincaré d'après le théorème 1. Donnons une preuve "ergodique" de ce résultat, basée sur le lemme suivant:

Lemme de récurrence de Khintchine

LEMME 4. *Soit (X, B, μ, T) un système dynamique. Alors pour tout ensemble mesurable A la suite*

$$(\gamma_n)_{n \geqq 0} = (\mu(T^{-n}A \cap A))_{n \geqq 0}$$

est une suite définie positive et possède une moyenne

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n < N} \mu(T^{-n}A \cap A) \geqq [\mu(A)]^2.$$

La suite $(\gamma_n)_{n \geqq 0}$ est définie positive car si $a_0, \ldots, a_n$ sont des nombres complexes:

$$\sum_{i,j=0}^{n} a_i \bar{a}_j \gamma_{i-j} = \sum_{i,j=0}^{n} a_i \bar{a}_j \mu(T^{-(j-i)}A \cap A) = \sum_{i,j=0}^{n} a_i \bar{a}_j \mu(T^{-i}A \cap T^{-j}A).$$

Notons χ_E la fonction caractéristique d'un ensemble E:

$$\sum_{i,j=0}^{n} a_i \bar{a}_j \gamma_{i-j} = \int_X = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i \chi_{T^{-i}A}\right)\left(\sum_{i=0}^{n} \bar{a}_i \chi_{T^{-i}A}\right) d\mu \geqq 0.$$

Par conséquent cette suite possède une moyenne $\lim_{N \to \infty} (1/N) \Sigma_{n \leqq N} \gamma_n$, et il est classique que cette moyenne est supérieure ou égale à $(\mu(A))^2$.

Il est donc immédiat que les ensembles de van der Corput sont des ensembles de Poincaré: étant donné un ensemble mesurable B de mesure non nulle d'un système dynamique (X, B, μ, T), la suite $(\gamma_n)_{n \geqq 0}$ associée est la transformée de Fourier d'une mesure positive ν sur $[0, 2\pi]$ et si les γ_n s'annulent sur H, d'après la définition 3, μ est continue en 0 et donc la moyenne de $(\gamma_n)_{n \geqq 0}$ est nulle, ce qui est impossible (on trouvera dans Bass [1] toutes précisions sur les suites définies positives et leurs moyennes).

Nous aurions souhaité montrer que lorsque les coefficients de Fourier d'une mesure tendent vers 0 lorsque n tend vers l'infini en restant dans un ensemble de van der Corput, alors la mesure est continue. Nous n'y sommes pas parvenus mais:

THÉORÈME II. *Soit H un ensemble de van der Corput.*

(1) *Soit ν une mesure sur $[0,2\pi]$ telle que:*

$$\exists \alpha \geqq 0 \qquad \sum_{k \in H} \left| \int_0^{2\pi} \cos kx d\nu(x) \right|^\alpha < \infty$$

ou encore

$$\sum_{k \in H} \left| \int_0^{2\pi} e^{-inx} d\nu(x) \right|^\alpha < \infty$$

alors la mesure ν est continue sur $[0,2\pi]$.

(2) *Soit (X, B, μ, T) un système dynamique, A un ensemble mesurable tel que*

$$\exists \alpha \geqq 0 \qquad \sum_{k \in H} [\mu(T^{-k}A \cap A)]^\alpha < \infty$$

alors $\mu(A) = 0$.

(3) *Soit $(u_n)_{n \geqq 0}$ une suite réelle telle que pour tout entier p il existe $\alpha \geqq 0$ tel que*

$$\sum_{k \in H} \left| \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n \leqq N} \exp(2i\pi p(u_{n+k} - u_n)) \right|^\alpha < \infty.$$

Alors la suite $(u_n)_{n \geqq 0}$ est équirépartie modulo un.

La démonstration s'inspire directement de Kamae et Mendès France [5] et Rusza [8].

Soit H un ensemble de van der Corput; montrons que

$$\sum_{k \in H} \left| \int_0^{2\pi} \cos kx d\nu(x) \right|^2 < \infty \Rightarrow \nu \text{ est continue sur } [0,2\pi].$$

Soit $P(x) = a_0/\sqrt{2} + \Sigma_{k \in H} a_k \cos kx$ un polynôme trigonométrique vérifiant

$$P(0) = 1, \quad P(x) \geqq 0, \quad a_0 < \varepsilon$$

dont il est fait état dans la définition III.

D'après un théorème de Fejer, il existe $g(x) = \Sigma_{m \geqq 0} b_m e^{imx}$ tel que

$$P(x) = g(x)\overline{g(x)}.$$

Ainsi

$$a_0/\sqrt{2} = \sum_{m \geqq 0} \| b_m \|^2$$

et:

$$2\pi\Big(\sum_{k \in H \cup \{0\}} \| a_k \|^2 \Big) = \int_0^{2\pi} P(x)\overline{P(x)}dx$$

où dx désigne la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$,

$$2\pi \Big(\sum_{k \in H \cup \{0\}} \| a_k \|^2 \Big) = \int_0^{2\pi} (g\bar{g})^2(x)dx$$

$$\leqq \sqrt{\int_0^{2\pi} g\bar{g}(x)dx} \sqrt{\int_0^{2\pi} g\bar{g}(x)dx}$$

$$\leqq \sum \| b_m \|^2 = a_0.$$

Comme $P(x)$ est toujours positif, si nous posons $l_k = \int^{2\pi} \cos kx d\nu(x)$:

$$0 \leqq \nu(\{0\}) \leqq \int_0^{2\pi} P d\nu = a_0/\sqrt{2} + \sum_{k \in H} a_k l_k$$

$$\leqq \sqrt{\sum_{k \in H \cup \{0\}} \| a_k \|^2} \sqrt{\sum_{k \in H \cup \{0\}} \| l_k \|^2}$$

$$\leqq a_0 \sum_{k \in H} \left| \int_0^{2\pi} \cos kx d\nu(x) \right|^2.$$

Comme a_0 peut être pris arbitrairement petit, $\mu(0)$ est nul.

Si ν avait une masse au point $c \neq 0$, la mesure translatée $\nu_1(x) = \nu_1(x-c)$ en aurait une en 0 ainsi que la mesure

$$\nu_2(x) = \tfrac{1}{2}[\nu_1(x) + \nu_1(2\pi - x)], \qquad x \in [0, 2\pi].$$

Or

$$\int_0^{2\pi} \cos kx d\nu_2(x) = \tfrac{1}{2}\cos kc \cdot \int_0^{2\pi} \cos kx d\nu(x)$$

et d'après ce qui précède ν_2 n'a pas de masse en 0, donc ν n'a pas de masse en c.

Passons au cas où α n'est plus égal à 2.

Si $\alpha \leqq 2$ et $\Sigma |\int \cos kxd\nu(x)|^\alpha$ converge, alors $\Sigma |\int \cos kxd\nu(x)|^2$ converge aussi, d'où le résultat.

Si α est supérieur ou égal à 2, il existe m tel que $\alpha \leqq 2m$ et:

$$\sum \left| \int_0^{2\pi} (\cos kxd\nu(x))^{2m} \right| < \infty.$$

Supposons, quitte à changer ν en $\frac{1}{2}(\nu(x)+\nu(2\pi - x))$ que $\int_0^{2\pi} \sin kxd\nu(x) = 0$; alors si ν a une masse en 0 la mesure $\nu_m = \nu \times \nu \times \nu \times \cdots \times \nu$ (m fois) a aussi une masse et

$$\int_0^{2\pi} \cos kxd\nu_m(x) = \int_0^{2\pi} (\cos kxd\nu(x))^m$$

ainsi

$$\int_0^{2\pi} (\cos kxd\nu_m x)^2 < \infty$$

et donc ν_m n'a pas de masse, donc ν non plus.

La preuve se ferait de même en considérant $\int_0^{2\pi} e^{-2ikx} d\nu(x)$ au lieu de $\int_0^{2\pi} \cos kxd\nu(x)$.

La seconde proposition est immédiate au vu du lemme 4.

Prouvons la troisième. Soit $(u_n)_{n \geqq 0}$ une suite réelle; fixons un entier p et posons

$$y_n = \exp(2i\pi p u_n).$$

Supposons qu'il existe $\alpha = \alpha(p)$ tel que

$$\sum_{k \in H} \left| \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \exp(2i\pi p(u_{n+k} - u_n)) \right|^\alpha = \sum_{k \in K} \left| \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum y_{n+k} \cdot \bar{y}_n \right|^\alpha < \infty$$

et soit F un sous-ensemble infini de **N** tel que pour tout $k \in \mathbf{N}$ la limite suivante existe:

$$\lim_{N \in F} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} y_{n+k} \bar{y}_n = \gamma_k.$$

La suite $(\gamma_k)_{k \geqq 0}$ est une suite définie positive (car c'est une corrélation) et est donc la transformée de Fourier d'une mesure sans masse en 0 d'après 1. Or la masse en 0 est égale ([1]) à la moyenne de $(\gamma_n)_{n \geqq 0}$ qui est aussi égale ([1]) au carré de la moyenne de $(y_n)_{n \geqq 0}$; ainsi:

$$\lim_{\substack{N \to \infty \\ N \in F}} \frac{1}{N} \sum_{n<N} y_n = \lim_{\substack{N \to \infty \\ N \in F}} \frac{1}{N} \sum_{m<N} \exp(2i\pi p u_n) = 0.$$

Ceci étant vrai pour tout p, la suite $(u_n)_{n\geqq 0}$ est équirépartie modulo un d'après le critère de Weyl.

§3. Quelques exemples cités par Kamae et Mendès France où l'on peut en dire davantage

THÉORÈME 3. (A) *Nous dirons qu'un sous-ensemble H de $\mathbf{N}$ possède la propriété A s'il existe un sous-ensemble infini I tel que H contienne*

$$I-I=\{p-q\,;p>q\,;p,q\in I\}.$$

(B) *Nous dirons qu'un sous-ensemble H de $\mathbf{N}$ possède la propriété B si pour tout $k\in\mathbf{N}$, $H\cap k\mathbf{Z}$ contient un sous-ensemble infini $B_k=(b_1^kb_2^k\cdots)$ tel que la suite $(b_n^kx)_{n\geqq 0}$ soit équirépartie modulo un pour tout x irrationnel.*

Soit H un ensemble possédant la propriété A ou B; alors

(1) *Pour toute mesure positive ν sur $[0,2\pi]$, de série de Fourier $(\gamma_n)_{n\in\mathbf{Z}}$*

$$\lim_{\substack{n\in H\\ n\to\infty}}\gamma_n=0\Rightarrow \nu \text{ est une mesure continue},$$

$$\lim_{\substack{k\in H\\ k\to\infty}}\int_0^{2\pi}\cos kx\,d\nu(x)=0\Rightarrow \nu \text{ est une mesure continue}$$

et de façon plus précise pour toute mesure ν sur $[0,2\pi]$:

$$\nu(\{0\})\leqq\overline{\lim_{\substack{k\in H\\ k\to\infty}}}\int_0^{2\pi}\cos kx\,d\nu(x),$$

et

$$\nu(\{0\})\leqq\overline{\lim_{\substack{h\in H\\ h\to\infty}}}\gamma_h.$$

(2) *Soit $(u_n)_{n\geqq 0}$ une suite réelle telle que pour tout entier p:*

$$\lim_{\substack{k\to\infty\\ k\in H}}\left(\overline{\lim_{N\to\infty}}\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\exp[2i\pi p(u_{n+k}-u_n)]\right)=0$$

alors la suite $(u_n)_{n\geqq 0}$ est équirépartie modulo un.

(3) *Soit (X,B,μ,T) un système dynamique, soit A un ensemble mesurable; alors*

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists n\in H\qquad \mu(T^{-n}A\cap A)\geqq[\mu(A)]^2-\varepsilon.$$

Un exemple d'ensemble vérifiant B est

$$\{p^2; p \in \mathbf{N}^*\}$$

et plus généralement

$$\{Q(p); p \in \mathbf{N}^*\}$$

où $Q(X)$ est un polynôme à coefficients entiers tel que $Q(0) = 0$.

Les suites "à distributions homogènes" ([3]) vérifient également B (on dit qu'une suite $(n_i)_{i \geqq 0}$ est à distribution homogène si pour tout x non nul la suite $(n_i x)_{i \geqq 0}$ est équirépartie modulo un).

Montrons que $A \Rightarrow 1$.

Soit $J = \{j_1, j_2 \dots\}$ un ensemble inclus dans I tel que $j_{n+1}/j_n > 3$.

Alors H contient $(J - J)^* = \{p - q;\ p > q,\ p, q \in J\}$, et chaque élément de $J - J$ est obtenu d'une seule façon comme la différence de deux éléments de J.

Considérons, suivant Mendès France et Kamae, le polynôme trigonométrique

$$\begin{aligned} f_N(x) &= \frac{1}{N^2}\left(\sum_{\substack{j_l \in J \\ l < N}} e^{ij_l x}\right)\left(\sum_{\substack{j_l \in N \\ l < N}} e^{ij_l x}\right) \\ &= \frac{1}{N} + \frac{2}{N^2} \sum_{\substack{j_l \in J \\ j_k \in J \\ N > l > k}} e^{i(j_l - j_k)x}. \end{aligned}$$

Le polynôme trigonométrique $f_N(x)$ prend des valeurs positives pour tout x; sa partie réelle

$$\frac{1}{N} + \frac{2}{N^2} \sum_{\substack{j_l \in J \\ j_k \in J \\ N > l > k}} \cos(j_l - j_k)x$$

prend donc des valeurs positives et vaut 1 lorsque $x = 0$; donc étant donné une mesure ν sur $[0, 2\pi]$:

$$\begin{aligned} \nu(\{0\}) &\leqq \int_0^{2\pi} f_N(x) d\nu(x) \\ &= \frac{1}{N} + \frac{2}{N^2} \sum_{N > l > k} \cos(j_l - j_k) x d\nu(x) \\ &\leqq \left[\sup_{h \in (J-J)^*} \int_0^{2\pi} \cos hx d\nu\right]\left(\sum_{N > l > k} \frac{2}{N^2}\right) + \frac{1}{N} \\ &\leqq \sup_{h \in (J-J)^*} \int_0^{2\pi} \cos hx d\nu(x) \end{aligned}$$

et comme J est simplement un sous-ensemble de I suffisamment lacunaire:

$$\nu\{0\} \leqq \limsup \int_0^{2\pi} \cos hx d\nu(x)$$

et $\nu\{0\} = 0$ lorsque cette limite est nulle.

Nous procéderions de même pour les $(\gamma_k)_{k \geqq 0}$.

Nous montrerions que $A \Rightarrow 2$ comme au théorème 2, compte tenu de la remarque ci-dessus sur $f_N(x)$.

Nous montrerions de même que si H vérifie la propriété (A), alors si A est un ensemble mesurable d'un système dynamique (X, B, μ, T) d'après le lemme 4 la suite $(\gamma_n)_{n \geqq 0} = \mu(T^{-n}A \cap A)$ est la transformée de Fourier d'une mesure ν sur $[0,2\pi]$ vérifiant $\nu\{0\} \geqq [\mu(A)]^2$ et d'après (1)

$$\begin{aligned}[\nu(A)]^2 &\leqq \overline{\lim_{\substack{h \to \infty \\ h \in H}}} \gamma_n \\ &\leqq \overline{\lim_{\substack{k \to \infty \\ k \in H}}} \mu(T^{-n}A \cap A).\end{aligned}$$

Montrons maintenant que $B \Rightarrow 1$. Suivons toujours la démonstration de Kamae et Mendès France; étant donné une mesure ν sur $[0,2\pi]$, choisissons un entier k tel que:

$$\sum_{\substack{2\pi(p/q) \in Q \cap [0,2\pi] \\ q \text{ ne divise pas } k}} \nu\left(\left\{\frac{2\pi p}{q}\right\}\right) < \varepsilon.$$

Soit $B_k = (b_1^k b_2^k \cdots) \subset H \cap k\mathbf{Z}$ une suite telle que la suite $(b_n x)_{n \geqq 0}$ soit équirépartie modulo un pour tout x irrationnel; soit

$$f_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} e^{ib_j x}.$$

Lorsque x est irrationnel

$$\lim_{N \to \infty} f_N(x) = 0.$$

Lorsque x est rationnel et se met sous la forme p/k, $f_N(x) = 1$ pour tout N. Lorsque x est rationnel et ne se met pas sous la forme p/k, $1 \geqq f(x) \geqq -1$.

Par convergence dominée, les coefficients de Fourier $(\gamma_n)_{n \geqq 0}$ de la mesure ν vérifient:

$$\sum_{\substack{x\in 2\pi(p/k)\\ x\in[0,2\pi]}} \nu(\{x\}) - \sum_{\substack{x=2\pi(p/q)\\ x\in[0,2\pi]\\ q \text{ ne divise pas } k}} \nu(\{x\}) \leqq \varliminf_{N\to\infty} \frac{1}{N}(\gamma_{b_1}+\cdots+\gamma_{b_n})$$

$$\leqq \varlimsup_{N\to\infty} \frac{1}{N}(\gamma_{b_1}+\cdots+\gamma_{b_n}) \leqq \sum_{\substack{x\in 2\pi(p/k)\\ x\in[0,2\pi]}} \nu(\{x\}) + \sum_{\substack{x=2\pi(p/q)\\ x\in[0,2\pi]\\ q \text{ ne divise pas } k}} \nu(\{x\}).$$

Comme

$$\sum_{\substack{x=2\pi(p/q)\\ x\in[0,2\pi]\\ q \text{ ne divise pas } k}} \nu\{x\}$$

est majoré en valeur absolue par ε nous obtenons

$$\nu\{0\} \leqq \varlimsup_{k\to\infty}\left(\varlimsup_{N\to\infty}\frac{1}{N}(\gamma_{b_1^k}+\cdots+\gamma_{b_N^k})\right)$$

$$\leqq \varlimsup_{\substack{h\to\infty\\ h\in H}} \gamma_h.$$

On passe à $\int_0^{2\pi}\cos kx d\nu(x)$ selon le procédé standard, ainsi qu'au cas des sauts situés hors de l'origine.

Les propositions 2 et 3 se déduisent immédiatement de 1.

D'une façon analogue (on trouvera dans Bass, 5e partie, le type de démonstration à mettre en oeuvre) nous pourrions prouver dans le cas (B):

Complément au Théorème 3. *Etant donné un ensemble H vérifiant l'hypothèse* (B), *une mesure ν sur* $[0,2\pi]$, *et sa série de Fourier* $(\gamma_n)_{n\geqq 0}$:

$$\sum_{(p/q)\in Q\cap[0,1]} \nu\left(\left\{\frac{2\pi p}{q}\right\}\right) = \lim_{k\to\infty}\lim_{N\to\infty}\frac{(\gamma_{b_1^k}+\cdots+\gamma_{b_N^k})}{N}$$

et plus généralement:

$$\sum_{(p/q)\in Q\cap[0,1]} \nu\left(\left\{x+\frac{2\pi p}{q}\right\}\right) = \lim_{k\to\infty}\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\left(\sum_{j=1}^{N}\exp(ib_j^k x)\gamma_{b_j^k}\right).$$

On peut également obtenir des indications sur la somme des carrés des sauts de ν.

Si H est un ensemble à distribution homogène, nous obtenons plus simplement:

$$\nu(\{0\}) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\gamma_i.$$

§4. Application à la suite $(x\theta^n)_{n\geq 0}$

THÉORÈME 4. *Soient a et r des entiers positifs; soit θ un nombre réel supérieur à 1 vérifiant*

$$\theta^{2r} = a\theta^r + 1,$$

$$\theta^{2r} = a\theta^r - 1,$$

où encore

$$\theta = \sqrt[r]{a}.$$

Si la suite $\{x\theta^n\}_{n\geq 0}$ est répartie modulo un selon une mesure dont les coefficients de Fourier tendent vers 0, alors elle est équirépartie modulo un (c'est le cas en particulier si la mesure de répartition est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue).

Les bases θ ainsi définies se comportent, sous cet aspect, comme des bases entières.

Soit $u_n = (x(\sqrt[r]{a})^n)_{n\geq 0}$

$$u_{n+hr} - u_n = x(a^h - 1)(\sqrt[r]{a})^n.$$

Soit ν la mesure de répartition de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ (ou à défaut une mesure associée à cette suite), ce qui veut dire qu'il existe un sous-ensemble infini F de $\mathbf{N}$ tel que pour toute fonction e^{mix}

$$\lim_{\substack{N\to\infty \\ N\in F}} \frac{1}{N} \sum_{n<N} e^{imu_n} = \int_0^1 e^{imx} d\nu(x).$$

La somme

$$v_{h,m} = \lim_{\substack{N\to\infty \\ N\in F}} \frac{1}{N} \sum_{n<N} e^{2i\pi m(u_{n+hr} - u_n)} = \lim_{\substack{N\to\infty \\ N\in F}} \frac{1}{N} \sum_{n<N} e^{2i\pi m(a^h-1)u_n}$$

est donc égale à $\gamma_{n(a^h-1)}$.

Si nous fixons m, la limite de $v_{h,m}$ est nulle lorsque h tend vers l'infini; d'après le théorème 3, la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est équirépartie modulo un.

Soit maintenant $\theta^{2r} = a\theta^r \pm 1$. Nous savons que la suite $(x\theta^n)_{n\geq 0}$ est équirépartie modulo un si et seulement si la suite $((\theta^{4r} - 1)x\theta^n)_{n\geq 0}$ l'est ([2]).

Soit ν une mesure associée à la suite $(x\theta^n)_{n\geq 0}$, dont les coefficients de Fourier tendent vers zéro lorsque n tend vers l'infini.

Soit $u_n = x(\theta^{4r} - 1)\theta^n$

$$u_{n+4pr} - u_n = x\theta^n ((\theta^{4r+4pr} - \theta^{4pr}) - (\theta^{4r} - 1))$$

$$= x\theta^n \cdot \theta^{2pr+2r}\left(\theta^{2pr+2r} + \frac{1}{\theta^{2p+2r}} - \left(\theta^{2p-2r} + \frac{1}{\theta^{2p-2r}}\right)\right).$$

D'après les formules de Newton

$$m(p) = \theta^{2r+2p} + \frac{1}{\theta^{2r+2p}} - \left(\theta^{2p-2r} + \frac{1}{\theta^{2p-2r}}\right)$$

est un entier qui tend vers l'infini avec p (en effet θ^{2s} a pour conjugué $1/\theta^{2s}$). Les répartitions des suites $(m(p).x\theta^n.\theta^{2pr+2r})_{n\geqq 0}$ et $(m(p)x\theta^n)_{n\geqq 0}$ sont les mêmes.

Pour tout entier k fixé:

$$\lim_{p\to\infty}\left|\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n<N} e^{2i\pi kx\theta^n m(p)}\right| = \lim_{p\to\infty}\gamma_{m(p)} = 0$$

et d'après le théorème 3, $(u_n)_{n\geqq 0}$ est équirépartie modulo un, donc $(x\theta^n)_{n\geqq 0}$ aussi.

Bibliographie

1. J. Bass, *Cours de mathématiques*, tomme III, Masson, Paris, 1971.
2. A. Bertrand-Mathis, *Développements en base θ et répartition modulo* un *de la suite* $(x\theta^n)_{n\geqq 0}$, Bull. Soc. Math. Fr. (1986), to appear.
3. M. Boshernitzan, *Homogeneously distributed sequences and Poincaré sequences of integers of sublacunary growth*, Monatsh. Math. **96** (1983), 173–181.
4. H. Fürstenberg, *Recurrence in Ergodic Theory and Combinatorial Number Theory*, Princeton University Press, Princeton, 1981.
5. T. Kamae and M. Mendès France, *Van der Corput's difference theorem*, Isr. J. Math. **31** (1978), 335–342.
6. W. Parry, *Topics in Ergodic Theory*, Cambridge University Press, New York, 1981.
7. I. Rusza, *On difference sets*, Stud. Sci. Math. Hung. **13** (1978).
8. I. Rusza, *Ensembles intersectifs*, Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux, 1982–1983.